Πηγές και είδη σφαλμάτων

Μικρή σύνοψη από τα προηγούμενα Υπολογίσαμε τις τιμές των e, $e^{5.5}$, π και παρατηρήσαμε ότι η ίδια μέθοδος μπορεί ή όχι να αποδώσει για να υπολογίσουμε την τιμή ενός άρρητου αριθμού.
Οι διαφορετικές περιπτώσεις μας έδειξαν:
α) Η μέθοδος/αλγόριθμος δεν δίνει ακριβή αποτελέσματα e^{55} καταστροφικά λάθος αποτελέσματα
β) Η μέθοδος/αλγόριθμος δεν είναι αποδοτικός, δλδ αργεί να συγκλίνει (χρειάζονται πολλούς όρους για ικανοποιητικά αποτελέσματα).

Σφάλματα

Αρχικά σφάλματα προέρχονται από τα δεδομένα του προβλήματος πχ πειραματικά δεδομένα ή μετρήσεις
Σφάλμα μαθηματικού προβλήματος ή περιγραφής προέρχονται από την μετατροπή του αρχικού προβλήματος σε μαθηματικό Δλδ σφάλμα στην περιγραφή του προβλήματος.

Προβλήματα κακής κατάστασης (ill-posed problems)

Αριθμητικά προβλήματα των οποίων η λύση είναι πολύ "ευαίσθητη" σε μικρές μεταβολές των δεδομένων του προβλήματος.

Σφάλμα αποκοπής

Το σφάλμα αποκοπής (truncatin error) είναι σφάλμα που δημιουργείται από τον αλγόριθμο και τη σχετική προσέγγιση με την υπόθεση ότι όλες οι αριθμητικές πράξεις είναι ακριβείς.

Παράδειγμα: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+$

$\forall n \in \mathbb{R} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ → Σφάλμα αποκοπής

Σφάλμα στρογγυλοποίησης

Σφάλμα που προκύπτει από την περιορισμένη μνήμη ή περιορισμένο χώρο που αποθηκεύεται ο αριθμός

Παράδειγμα $\pi = 3,14159\ldots$

$= 3,141592353.$

$\frac{1}{3} = 0,33333\ldots$

Παρατήρηση: Σημαντικά ψηφία ονομάζονται τα ψηφία ενός πραγματικού αριθμού, εκτός των μηδενικών, που βρίσκονται στην αρχή του αριθμού.

*Το σφάλμα υπολογισμού πρέπει να βρίσκεται εδώ, θα το βρεις στην τελευταία σελίδα

Μετάδοση σφαλμάτων

1. Το απόλυτο σφάλμα του αθροίσματος δύο α-

ριθμων ειναι μικροτερο ή ισο με το αθροισμα των απολυτων σφαλματων των αριθμων αυτων

Αποδειξη

Εστω x_1 και x_2 οι ακριβεις τιμες δυο αριθμων και x_1^* και x_2^* οι αντιστοιχες προσεγγισεις

Τοτε $\begin{cases} \varepsilon_1 = x_1^* - x_1 \\ \varepsilon_2 = x_2^* - x_2 \end{cases}$ και ζητω το σφαλμα του

$x = x_1 + x_2$ ΔΔΣ ζηταμε $|\varepsilon| = |x^* - x| = |(x_1^* + x_2^*) - (x_1 + x_2)| =$

$= |(x_1 - x_1^*) + (x_2^* - x_2)|$

τριγωνικη ανισοτητα $\leq |x_1 - x_1^*| + |x_2^* - x_2|$

$= |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$

2. Το απολυτο σφαλμα της διαφορας δυο αριθμων ειναι μικροτερο ή ισο με το αθροισμα των απολυτων σφαλματων των αριθμων αυτων.

Αποδειξη

Οπως και προηγουμενα $\begin{cases} \varepsilon_1 = x_1^* - x_1 \\ \varepsilon_2 = x_2^* - x_2 \end{cases}$ και οριζω

τη διαφορα $x = x_1 - x_2$

Αρα $|\varepsilon| = |x^* - x| = |(x_1^* - x_2^*) - (x_1 - x_2)|$

$= |(x_1^* - x_1) - (x_2^* - x_2)|$

τριγωνικη ανισοτητα $\leq |x_1^* - x_1| + |x_2^* - x_2|$

$= |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$

3. Το απολυτο σχετικο σφαλμα του γινομενου δυο αριθμων ειναι μικροτερο ή ισο απο το αθροισμα των απολυτων σχετικων σφαλματων των αριθμων αυτων.

Αποδειξη. Οριζουμε οπως και στα προηγουμενα

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = x_1^* - x_1 \\ \varepsilon_2 = x_2^* - x_2 \end{cases}$$ και πλέον $x = x_1 x_2$

Τότε: $|\delta| = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| = \left|\frac{x_1^* x_2^* - x_1 x_2}{x_1 x_2}\right| =$

$$= \left|\frac{x_1 x_2 + \varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 x_1 - x_1 x_2}{x_1 x_2}\right|$$

$\varepsilon = x_1^* x_2^* - x_1 x_2 = (\varepsilon_1 + x_1)(\varepsilon_2 + x_2) - x_1 x_2 =$

$= \left|\frac{\varepsilon_1}{x_1} + \frac{\varepsilon_2}{x_2}\right| \le \left|\frac{\varepsilon_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\varepsilon_2}{x_2}\right| = |\delta_1| + |\delta_2|$

$\cong \varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 x_1$

Το $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ είναι αμελητέο!

4. Το απόλυτο σχετικό σφάλμα του πηλίκου δύο αριθμών είναι μικρότερο ή ίσο από το άθροισμα των απολύτων σχετικών σφαλμάτων των αριθμών αυτών.

Απόδειξη

Ορίζουμε όπως και πριν $\varepsilon_1 = x_1^* - x_1$, $\varepsilon_2 = x_2^* - x_2$ και αντίστοιχα $\delta_1 = \frac{x_1^* - x_1}{x_1}$, $\delta_2 = \frac{x_2^* - x_2}{x_2}$

Τότε $\varepsilon = \frac{x_1^*}{x_2^*} - \frac{x_1}{x_2}$, $\delta = \frac{\frac{x_1^*}{x_2^*} - \frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{x_1^*}{x_2^*} \frac{x_2}{x_1} - 1 =$

$$= \frac{\varepsilon_1 + x_1}{\varepsilon_2 + x_2} \frac{x_2}{x_1} - 1 = \frac{\varepsilon_1 x_2 - \varepsilon_2 x_1}{x_1 (x_2 + \varepsilon_2)} \approx \frac{\varepsilon_1 x_2 - \varepsilon_2 x_1}{x_1 x_2} =$$

$$= \frac{\varepsilon_1}{x_1} - \frac{\varepsilon_2}{x_2} = \delta_1 - \delta_2$$

$|\delta| = |\delta_1 - \delta_2| \le |\delta_1| + |\delta_2|$

<u>Σφάλμα</u> (υπολογισμοί)

Ορίζουμε ως σφάλμα κατά τον υπολογισμό της ακριβούς ποσότητας x τη διαφορά

$$\varepsilon = x^* - x$$

όπου x^* η πραγματική τιμή του x.

<u>Απόλυτο σφάλμα</u> $|\varepsilon| = |x^* - x|$

<u>Σχετικό σφάλμα</u> $\delta = \frac{\varepsilon}{x} = \frac{x^* - x}{x} \approx \frac{x^* - x}{x^*}$

<u>Απόλυτο σχετικό σφάλμα</u> $|\delta| = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| = \left|\frac{\varepsilon}{x^*}\right|$